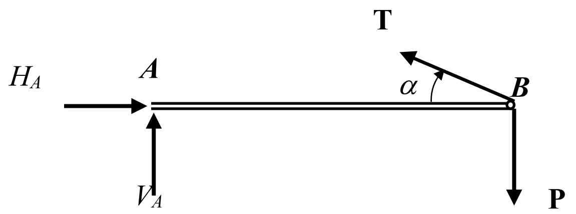
Problème1

1. Schéma et équilibre statique

$N_C = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$

avec $\ell_0 = \ell$



Equilibre des forces et des moments de forces

$\sum F_V :\ H_A = T\cos\alpha$

$\sum M_A :\ P\ell = T\ell \sin\alpha$

Et donc

$H_A = \frac{P}{\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{P}{\tan\alpha} = 10'392\ N$

2. Calcul de la charge critique

Avec un coefficient de sécurité de 2, nous avons, si la formule d'Euler est applicable :

$n = \frac{N_C}{N}$

$$N_C = 2N = \frac{2P}{\tan\alpha} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = 20'785\ \mathrm{N}$$

3. Moment d'inertie et diamètre

$$I = \frac{\pi}{64}(D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{64}D_e^4(1-0,8^4) = \frac{2P\ell^2}{\pi^2 E\tan\alpha} = 40,11 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}^4$$

Et donc

$$D_e^4 = \frac{64I}{\pi(1-0,8^4)} = \frac{128P\ell^2}{\pi^3(1-0,8^4)E\tan\alpha} = 1,384 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$$

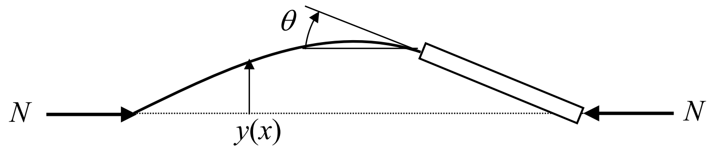
$D_e = 34,30$ mm
$D_i = 27,44$ mm

4. Vérification du domaine de validité

$F = \frac{\pi}{4}(D_e^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{4}D_e^2(1-0,8^2) = 0,3326 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$
$i = \sqrt{I/F} = 0,01099$
$\lambda = \frac{\ell}{i} = 182 > \lambda_P$

Problème 2

1. Schéma



2. Moment de flexion et déformée

$0 \leq x \leq \alpha\,\ell$

$$M(x) = Ny(x)$$

Ainsi l'équation différentielle de la déformée s'écrit :

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{N}{EI}y$$

On cherche une solution à l'équation différentielle $y'' + K^2 y = 0$ avec $K^2 = N/EI$

$$y = A\sin B\,x + C\cos D\,x$$

$$y' = AB\cos B\,x - CD\sin D\,x$$

$$y'' = -AB^2\sin B\,x - CD^2\cos D\,x \;=\; -\frac{N}{EI}[A\sin B\,x + C\cos D\,x]$$

On a donc

$$AB^2 = AK^2 \quad \text{et } CD^2 = CK^2$$

$$B \;=\; D \;= K$$

3. Conditions aux limites

$$y(x=0) = 0 \;= C$$

$$y'(x=\alpha\ell) = -\theta \;= \frac{y(\alpha\ell)}{(1-\alpha)\ell}$$

La seconde condition aux limites permet d'écrire

$$y' = AK\,cos\,K\,x = \frac{y(\alpha\ell)}{(1-\alpha)\ell} = \frac{A\,sin(K\,\alpha\ell)}{(1-\alpha)\ell}$$

Et donc finalement

$$tan\,(\alpha K\ell) + (1-\alpha)K\ell = 0$$

4. Charge critique (le paramètre α est tel que $0 < \alpha \leq 1$)

Pour le cas particulier $\alpha = 1$, on retrouve le résultat élémentaire $K\ell = n\pi$, d'où la charge critique

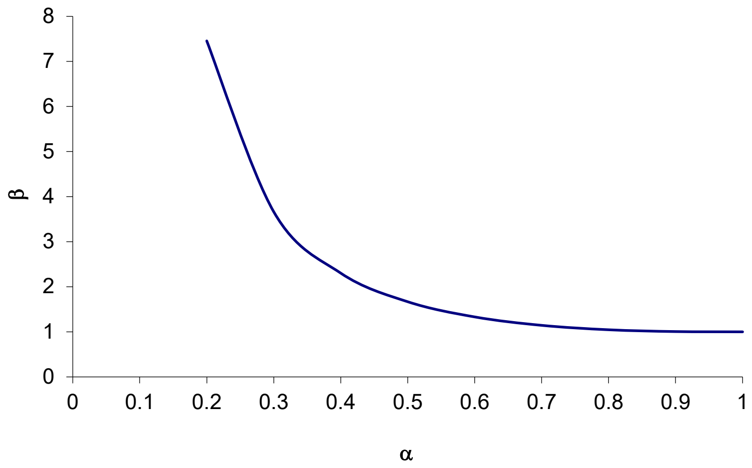
$$N_C = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = N_{C0}$$

Lorsque $\alpha \neq 1$, la résolution numérique de l'équation caractéristique permet de calculer la charge critique N_C que nous exprimerons sous la forme :

$$N_C = \beta N_{C0}$$

Le domaine de validité de la courbe de la fig1. est limité vers la gauche par la limite de proportionnalité (domaine d'Euler). Cette limite s'exprime par $N_C \leq R_P F$ ou $N_C \leq N_{CP}$, ce qui donne pour β :

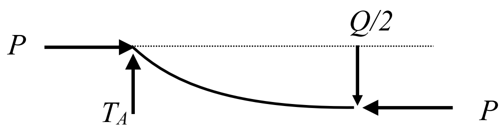
$$\beta \leq \frac{R_P \ell^2 F}{\pi^2 EI} = \frac{\lambda_0^2 R_P}{\pi^2 E}$$



α	β
1	1
0,9	1,006
0,8	1,046
0,7	1,144
0,6	1,331
0,5	1,668
0,4	2,303
0,3	3,664
0,2	7,455
0,1	27,2
0	∞

Problème 3

1. Schéma et équilibre statique



Vu la symétrie, on peut ne considérer que la moitié du système

$$\boldsymbol{T_A = \frac{Q}{2} = T_C}$$

2. Calcul du moment de flexion

$$\boldsymbol{M(x) = \frac{Q}{2}x + Py}$$

3. Expression de la déformée

$$y'' = -\frac{\boldsymbol{M(x)}}{EI} = -\frac{Py}{EI} - \frac{Qx}{2EI}$$

Dont l'intégrale générale est :

$$y = A\cos\omega\, x + B\sin\omega\, x - \frac{Qx}{2P} \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = \frac{P}{EI}$$

Conditions aux limites

$$y(x=0) = 0 \qquad \rightarrow A = 0$$

$$y'(x=\ell/2) = -\omega A\sin\omega\frac{\ell}{2} + \omega B\cos\omega\frac{\ell}{2} - \frac{QP}{2} \qquad \rightarrow B = \frac{Q}{2P\omega\cos\omega\frac{\ell}{2}}$$

Finalement on exprime la déformée

$$y = \frac{Q}{2P\omega}\left(\frac{\sin\omega x}{\cos\omega\frac{\ell}{2}} - \omega x\right)$$

4. Calcul de la charge critique P_C

La charge critique correspond à y → ∞ et donc pour $\cos\omega\frac{\ell}{2} = 0$

D'où l'on peut exprimer $\omega\frac{\ell}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{P_C}{EI}}$

On sait donc que *Q* est sans influence sur la charge critique. En effet, la charge critique correspond à la valeur propre de l'équation caractéristique, or *Q* n'intervient qu'au second membre. Par contre, la contrainte dangereuse est influencée par *Q*.